A carta de Goldbach a Euler, datada de 7 de Junho de 1742, deu origem à versão moderna de sua conjectura, como atualmente difundida:

***Todo inteiro par maior que 2 pode ser representado como a soma de 2 primos.***

Estamos propondo uma conjectura equivalente:

***Todo inteiro maior que 1 pode ser representado pela média de 2 primos.***

Exemplos:

Primo 37  (31  43)  2;

Par 38  (29  47)  2;

Impar 39  (37  41)  2.

Então teríamos, para qualquer inteiro positivo n > 1, a identidade:

2 n  p  q,

com p, q primos.

Sabe-se que:

2 n  (n  k)  (n  k)

para k qualquer; em particular um inteiro.

E, portanto podemos ter:

p  n  k e

q  n  k.

Desta forma, obtemos primos equidistantes de **n**, através do índex **k**, o que chamamos de **simetria** para o número **n**.

Esta simetria, envolvendo os inteiros:

(n  k) < n e

(n k) > n

Tem como **amplitude**:

3 ••• **n** ••• 2n 3.

Abaixo, encontram-se várias simetrias para o número 39.

5-34 7-32 11-28 17-22 19-20 31-8 37-2 **390** 412 478 5920 6122 6728 7132 7334

Obvio que se o próprio **n** é primo, o resultado é trivial para k = 0; porém, em nosso propósito adotamos sempre:

**k > 0**,

**n > 3** e

**p ≠ q**.

Média aritmética simples, ordinária.

Distinguimos os inteiros ímpares dos inteiros ímpares primos.

Se o número para o qual procuramos simetria é par o índex é ímpar, e vice-versa.

Ao considerarmos a hipótese, verificamos os primeiros 2097150 inteiros consecutivos e ocorreu a confirmação do enunciado.

Mas não era o suficiente; tentamos vários outros números consecutivos (sendo sempre aleatório o primeiro deles) de maior grandeza, por exemplo:

Inteiros com 32 bits:

2326416308 ••• 2326437251

Inteiros com 64 bits:

10812083835233317544 ••• 10812083835233361798

Inteiros com 128 bits:

313545261969434692888811456477964920750 •••

313545261969434692888811456477964922750

Inteiros com 256 bits:

61923203513751080846449615934029927595897073585560405976048239712178367757632 •••

61923203513751080846449615934029927595897073585560405976048239712178367757800

Analisando **k**, observamos que sempre é muito pequeno em relação à **n**.

Para 2097150 inteiros, o máximo valor de k encontrado foi 1722.

Em testes aleatórios efetuados com números de 512 bits, o maior valor de k foi 70038, o que se mostrou curioso! O índex tem apenas17 bits.

A seguir o número:

13129200716891033366354877688613209067350309462450835343836694081340406493202375322485753821651880624847198852520323171633499058898983581690280849216741069 ****

(13129200716891033366354877688613209067350309462450835343836694081340406493202375322485753821651880624847198852520323171633499058898983581690280849216671031) ****

(13129200716891033366354877688613209067350309462450835343836694081340406493202375322485753821651880624847198852520323171633499058898983581690280849216811107) **2**.

Utilizamos o algoritmo de Rabin-Miller para averiguar se os números são primos.

Tendo em vista os resultados com os primeiros inteiros consecutivos, não fomos tão rigorosos nas averiguações ulteriores e o total de iterações para o teste de primalidade foi apenas de 25 vezes para cada primo.

Mas, qual a garantia de que o resultado é sempre encontrado? E outra dúvida se impôs: como avaliar a probabilidade de encontrarmos esta simetria?

Somente para fixar uma ideia, vamos examinar o seguinte problema: temos 20 esferas perfeitas e idênticas e duas roletas ideais, uma à esquerda ⎯ **E** ⎯ e outra à direita ⎯ **D** ⎯, cada uma com 36 células numeradas, que chamaremos de índex.

Giramos a roleta da esquerda e lançamos 11 das esferas.

Giramos a roleta da direita e lançamos as 9 esferas restantes.

Qual seria a probabilidade de se obter pelo menos uma coincidência, de forma que qualquer das 11 células ocupadas na roleta E, e qualquer das 9 células ocupadas na roleta D tivesse mesmo índex?

Apenas por conveniência, iremos investigar a questão inversa: qual seria a probabilidade **Pr** de não se obter nenhuma coincidência? Ou seja, ao final, quando as roletas estão paradas, nenhuma das esferas tem mesmo índex!

O raciocínio: quando todas as células da roleta E estão ocupadas e lançamos a 1ª esfera na roleta D temos 36 células disponíveis. Entretanto, não queremos que seu índex coincida com nenhum dos 11 índex ocupados da outra roleta.

A probabilidade deste evento é 25  36.

Ao lançarmos a 2ª esfera já temos uma célula ocupada e, portanto, uma opção a menos, de forma que esta probabilidade é 24  35.

Sucessivamente, desta forma, as possibilidades se reduzem a cada lançamento e para a última esfera, a probabilidade é 17  28.

Para atingir o objetivo, a probabilidade de não se obter nenhuma coincidência é:

Pr (2536)(2435)•••(1829)(1728).

Conhecido o resultado,

Pr 0.0217,

Podemos, agora, responder à primeira pergunta: a probabilidade de se obter pelo menos uma coincidência é 0.9783.

Roletas com **N** células e com **PQ** esferas, requerem equacionarmos melhor o problema, pois se os valores envolvidos são grandes o cálculo torna-se tedioso, difícil ou mesmo inexequível.

Preferimos utilizar Pr, a probabilidade de **não se obter nenhuma coincidência**, ao invés da probabilidade de **se obter pelo menos uma coincidência**, que se dá pelo complemento de Pr para 1. E apenas Pr será usada aqui!

Inexequível: parece simples distinguir números pares de ímpares! Basta ver o algarismo das unidades. Contudo, não é imediato para um número da ordem de um googol **escrito** na base 5! Observe que 105 não é divisível por 2.

E se temos um googolplex? Vide Kasner & Newman.

Formulando, temos:

Pr[(NP)N][(NP1)(N1)]•••

•••[(NPQ1)(NQ1)].

E a seguinte identidade combinatória, para inteiros a > b > m > 0, é útil:

C{b m}C{a m} {[b!(bm)!]}{[a!(am)!]}

[(ba)][(b1)(a1)]•••

•••[(bm1)(am1)].

Assim, com nossas variáveis, se N > P > Q e NP ≥ Q, temos:

PrC {NP Q}C {N Q}.

E, para ilustrar, no caso das roletas teríamos: C {259}C {369}.

Voltando à nossa conjectura, vamos investigar o que ocorre com primos distribuídos entre inteiros ⎯ usando o mesmo modelo anterior ⎯ fixando certo número **n** e considerando a amplitude de **N** inteiros:

Menores que **n** contendo **P** primos e

Maiores que **n** contendo **Q** primos.

Já vimos como calcular a probabilidade de não encontrarmos nenhum par de esferas sob índex equivalente e temos uma questão análoga, sendo os primos:

p  n  k e

q  n  k.

Se N, e, portanto P e Q,são de grandezas elevadas é difícil obter a probabilidade como fizemos, pois mesmo sendo N conhecido, como saber o valor de P e Q?

Primeiramente, podemos usar um artificio!

Não é difícil verificar que:

[(NP)N] > [(NP1)(N1)] > •••

••• > [(NPQ1)(NQ1)].

E, consequentemente, podemos fazer:

Pr [(NP)N]Q

tendo em vista que este valor é maior que C{NP Q}C{N Q}.

A seguir, sabe-se o que o Teorema dos Números Primos (TNP) nos assegura:

(x) ≈ x  log (x).

Para o fatorial de números muito grandes é melhor usar a aproximação de Stirling.

TNP: O teorema descreve a distribuição dos números primos entre inteiros e foi demonstrado independentemente por Jacques Hadamard e Charles Jean de la Vallée-Poussin em 1896, através do estudo da função de Bernhard Riemann. O teorema nos assegura que a quantidade de primos menores (ou eventualmente igual) que x é proporcional à razão entre x e o loge (x).

O que nos permite dizer, dentro da amplitude disponível, com P ≥ Q:

P ≈log (N) **primos <n**

Q ≈2 N log (2 N)  N log (N) **primos > n**

Temos:

Pr[1(PN)] Q

E substituindo P e Q, temos:

Pr{1[1log (N)]}[2Nlog (2N)Nlog (N)].

Para a conjectura ser válida precisávamos, por fim, demonstrar que Pr tende a zero quando **n** tende a infinito e... então nos encontramos diante de um aparente paradoxo: o intuitivo limite da função não era zero e os cálculos indicavam que sim.

Mas, prosseguimos e, malgrado o tempo que demandamos para calcular este limite, não conseguimos obtê-lo; todas tentativas foram infrutíferas.

Entretanto, recorrendo à Internet vimos que o problema já é consagrado entre acadêmicos e, de fato, o limite da função é zero.

Assim foi que obtivemos o resultado esperado, e desta forma,

**A probabilidade de não se obter nenhuma coincidência é:**

**Lim N→ ∞** Pr **0**

**Ou seja, provavelmente, sempre haverá pelo menos uma coincidência.**

Avaliar os primeiros números foi fácil e muito mais podemos obter simplesmente computando exaustivamente através de iterações continuas.

Porem, em vista do que temos: um cálculo probabilístico; poderia haver algum **n** para o qual a conjectura falhe, entre o último que venha a ser obtido e o infinito?

**Ivan Gondim Leichsenring**

Se você puder ajudar a tornar este texto mais legível, eu agradeço.

**Apex Algoritmos [ apex.eti.br ]**

**ivan@apex.eti.br**

Intuitivo... para nós!

São várias organizações que dispõem o resultado deste limite, entre elas:

<http://www.MathPortal.org> http:// www.DerivativeCalculator.net http:// [www.WolframAlpha.com](http://www.WolframAlpha.com)